1. Riemannův integrál

1.1. Motivace a definice.

Příklad 1.1. Přepravní společnost má pronajatý sklad pro uskladnění uhlí, které rozváží spotřebitelům. Sklad si za úschovu jednoho kg uhlí účtuje p Kč za jednu časovou jednotku. Určete cenu P, kterou je třeba zaplatit za období od a do b, je-li ve skladišti uloženo $m(t)$ kg uhlí, kde t je čas.

Úvahy budeme provádět pro funkce omezené na intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. pro takové funkce f pro které existuje $M \geq 0$, takové že platí

$$|f(x)| \leq M, x \in \langle a, b\rangle.$$

Definice 1.1. Nechť $\langle a, b\rangle$ je uzavřený interval. *Dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ je konečná množina bodů $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, která splňuje

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Prvky množiny D nazýváme *dělící body intervalu* $\langle a, b\rangle$. Interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme *$i-$ tý interval dělení.* Dělení D' nazýváme *zjemnění dělení* D, je-li $D \subset D'$, tj. každý dělící bod dělení D je dělícím bodem dělení D'.

Definice 1.2. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná a omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť je D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. *Horní součet funkce* f vzhledem k dělení D je číslo

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$M_i = \sup\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Dolní součet funkce f vzhledem k dělení D je číslo

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$m_i = \inf\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Existuje mnoho dělení D intervalu $\langle a, b, \rangle$. Uvažujme tedy množinu všech horních součtů vzhledem k příslušným dělením

$$\mathbf{H} = \{\overline{S}(f, D)|D \text{ je dělení } \langle a, b\rangle\},$$

Zřejmě platí

$$\overline{S}(f,D) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = m(b-a),$$

kde m je dolní závora funkce f omezené na $\langle a,b \rangle$. To znamená, že množina horních součtů je zdola omezená a existuje největší dolní mez těchto součtů. Číslo

$$\overline{S} = \inf \mathbf{H}$$

budeme nazývat *horní Riemannův integrál funkce* f. Dále můžeme podobně uvažovat množinu všech dolních součtů vzhledem k příslušným dělením intervalu $\langle a,b \rangle$, kterou označíme

$$\mathbf{D} = \{\underline{S}(f,D) | D \text{ je dělení } \langle a,b \rangle\}$$

Zřejmě platí

$$\underline{S}(f,D) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a),$$

kde M je nějaká horní závora omezené funkce f na $\langle a,b \rangle$. To znamená, že množina dolních součtů je shora omezená a existuje nejmenší horní mez těchto součtů.Číslo

$$\underline{S} = \sup \mathbf{D}$$

budeme nazývat *dolní Riemannův integrál funkce* f.

Definice 1.3. Říkáme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$ je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a,b \rangle$ právě tehdy, když

$$\overline{S} = \underline{S}.$$

Krátce to budeme zapisovat jako

$$f(x) \in R(a,b).$$

Společná hodnota se pak nazývá *Riemannův integrál* a značí se

$$(R) \int_a^b f(x)dx,$$

což budeme jednoduše zkracovat jako

$$\int_a^b f(x)dx,$$

1.2. **Existence Riemannova integrálu.**

Věta 1.1. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $\langle a, b\rangle$ a D' je zjemnění dělení D daného intervalu, pak*

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D).$$

Věta 1.2. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omezená na $\langle a, \rangle b$ a jsou-li D_1 a D_2 libovolná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2).$$

Věta 1.3. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná a omezená na $\langle a, b\rangle$, pak $\underline{S} \le \overline{S}$.*

Věta 1.4. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná a omezená na $\langle a, b\rangle$. Pak $f \in R(a, b)$ právě tehdy, když pro libovolné $\varepsilon > 0$ existije dělení D_ε intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D_\varepsilon) - \underline{S}(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Věta 1.5. *Je-li f monotonní na $\langle a, b\rangle$, pak $f \in R(a, b)$.*

Definice 1.4. Funkce f definovaná na $\langle a, b\rangle$ je stejnoměrně spojitá, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \langle a, b\rangle : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Věta 1.6. *Nechť f je definovaná a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak f je na $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně spojitá.*

Věta 1.7. *Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak $f \in R(a, b)$.*

Věta 1.8. *(**Vlastnosti Riemannova integrálu**) Nechť $f, g \in R(a, b)$, pak*

(1) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$
(2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \le c \le b,$
(3) *je-li* $f(x) \le g(x)$ *na* $\langle a, b\rangle$, *pak* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx,$
(4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

Poznámka: Nechť $f \in R(a, b)$ a $x \in \langle a, b\rangle$, pak podle části (2) předchozí věty je také $f \in R(a, x)$ a předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definována funkce, položíme ještě

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Věta 1.9. *Nechť $f \in R(a,b)$ a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, pak F je spojitá na $\langle a,b\rangle$.*

Věta 1.10. *Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, je diferencovatelná na $\langle a,b\rangle$, a platí $F' = f$. Tedy F je primitivní k f.*

Věta 1.11. *(**Newton-Leibnizova**) Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a F je libovolná primitivní funkce k f na tomto intervalu, pak*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Věta 1.12. *(**Metoda per-partes**) Nechť F a G jsou spojitě diferencovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$, pak*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Věta 1.13. *(**Metoda substituce**) Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a g spojitě diferencovatelná na $\langle \alpha,\beta\rangle$. Pak*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)dt,$$

kde $g(\alpha) = a$ a $g(\beta) = b$.

Definice 1.5. Funkce f se nazývá po částech spojitá na $\langle a,b\rangle$, jestliže existuje dělení D, $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ a spojité funkce f_i definované na $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ taková, že $f(x) = f_i(x)$ pro $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 1.6. (**Nevlastní integrál 1. druhu**) Nechť je funkce f omezená na $\langle a,\infty\rangle$ a R-integrovatelná pro libovolné $b > a$. Jestliže existuje vlastní

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

říkáme, že

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konverguje. V opačném případě říkáme, že daný integrál diverguje.

Definice 1.7. (**Nevlastní integrál 2. druhu**) Nechť f je definována na $\langle a,b\rangle$ a je R-integrovatelná na $\langle a+\varepsilon, b\rangle$ pro $0 < \varepsilon < b-a$. Jestliže existuje

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje.